$$\varphi(y) = \frac{1}{a} \cdot \tan(b \cdot y + c)$$

erhalten. Gleichzeitig liefern i)* und ii)* durch Gleichsetzen

$$\psi''/\psi' = \varphi''/\varphi' ,$$

so daß

$$\left(\psi'/\varphi'\right)' = 0$$

sein muß. Mithin ist

$$\psi' = c_1 \cdot \varphi'$$

oder $\psi(y) = c_1 \cdot \varphi(y) + c_2$. Setzt man die Ergebnisse zusammen, so findet man mit Integrationskonstanten $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, x_0, y_0$

$$\boxed{f(x,y) = \tilde{a} \cdot (x - x_0) \tan\left(\tilde{b}\,(y - y_0)\right) + \tilde{c}} .$$

Der Graph G_f von f stimmt bis auf Streckungen und Verschiebungen mit dem der Funktion

$$(x,y) \to \alpha \cdot x \cdot \tan y$$

überein.

4. Von <u>Scherk</u> stammt der Ansatz, Graphenminimalflächen mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f/\partial x}{(1+|\nabla f|^2)^{1/2}}\right) = 0 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f/\partial y}{(1+|\nabla f|^2)^{1/2}}\right)$$

zu suchen. Offenbar ergibt vorstehende Gleichung sofort

$$\operatorname{div}\left(\nabla f \Big/ \sqrt{1+|\nabla f|^2}\right) = 0.$$

Der Ansatz impliziert, daß

$$\varphi := \partial f/\partial x \cdot \left(1+|\nabla f|^2\right)^{-1/2} \qquad \text{und}$$

$$\psi := \partial f/\partial y \cdot \left(1+|\nabla f|^2\right)^{-1/2}$$

nur Funktionen von y bzw. x sind. Außerdem gilt

$$\varphi^2+\psi^2 = \left(1+|\nabla f|^2\right)^{-1} \cdot |\nabla f|^2 \qquad \Longrightarrow$$

$$\sqrt{1-\varphi^2-\psi^2} = 1/\sqrt{1+|\nabla f|^2},$$

so daß wir

$$\partial f/\partial x = \varphi \Big/ \sqrt{1-\varphi^2-\psi^2},$$

$$\partial f/\partial y = \psi \Big/ \sqrt{1-\varphi^2-\psi^2}$$

schreiben können. Nun benutzt man die Symmetrie $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(1-\varphi^2-\psi^2\right)^{-1} \cdot \left[\psi' \cdot \sqrt{1-\varphi^2-\psi^2} + \psi \frac{1}{\sqrt{\cdots}}\ \psi \cdot \psi'\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(1-\varphi^2-\psi^2\right)^{-1} \cdot \left[\varphi' \cdot \sqrt{\cdots} + \varphi \frac{1}{\sqrt{\cdots}}\ \varphi \cdot \varphi'\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \psi'\left(1-\varphi^2-\psi^2\right) + \psi^2 \cdot \psi' = \varphi'\left(1-\varphi^2-\psi^2\right) + \varphi' \cdot \varphi^2$$

Es folgt:

$$\psi'(1-\varphi^2) = \varphi' \cdot (1-\psi^2) \quad \text{bzw.}$$

$$\psi'(x) \Big/ (1-\psi^2(x)) = \varphi'(y) \Big/ (1-\varphi^2(y)) \quad \text{für alle } x, y .$$

Dies ist nur dann möglich, wenn mit $a \in \mathbb{R}$

$$\psi'(x) \cdot (1-\psi^2(x))^{-1} \equiv a, \quad \varphi'(y) \Big/ (1-\varphi^2(y)) \equiv a$$

erfüllt ist. Lösungen sind

$$\varphi(y) = \tanh a \cdot (y-y_0), \quad \psi(x) = \tanh a \cdot (x-x_0),$$

also z.B. für $a = 1$, $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi(y) \Big/ \sqrt{1-\varphi^2(y)-\psi^2(x)} = \frac{\sinh y \cdot \cosh x}{(1-\sinh^2 x \cdot \sinh^2 y)^{1/2}}$$

und entsprechend für $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Daraus folgt für f als mögliche Wahl

$$\boxed{f(x,y) = \arcsin(\sinh x \cdot \sinh y)} .$$

$\square$

Mit diesen Beispielen zu expliziten Lösungen der Minimalflächengleichung in Graphenform wollen wir es bewenden lassen. Natürlich hat man sich im vorigen Jahrhundert ausgiebig bemüht, möglich viele konkrete Minimalflächen, die nicht notwendig Graphen über ebenen Gebieten sind, zu bestimmen.